

Нелинейная механика и электродинамика континуума

С. А. Лычев

Версия 22.10.2019

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН

lychevsa@mail.ru

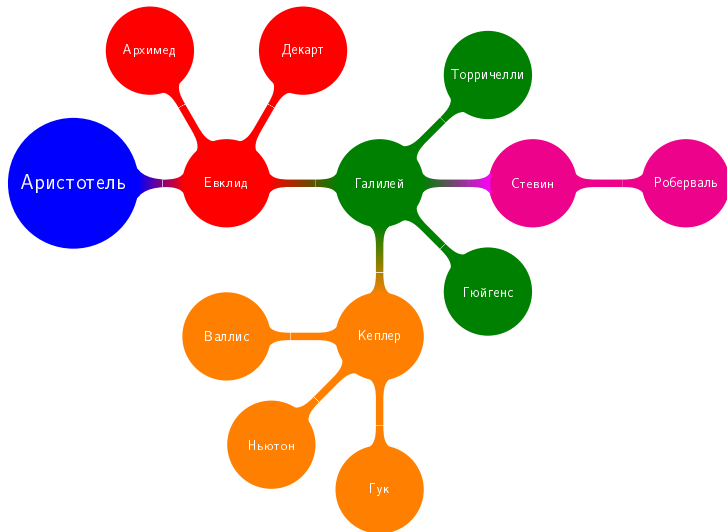
<http://ipmnet.ru/~lychev>

Москва, 2019

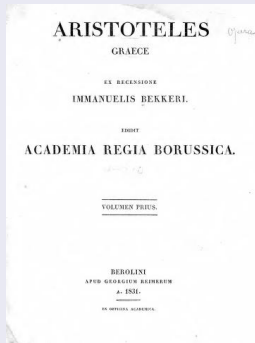
Исторический обзор: механика до Ньютона

Исторический обзор

Механика: до Ньютона



Аристотель (384 до н. э. – 322 до н. э.)



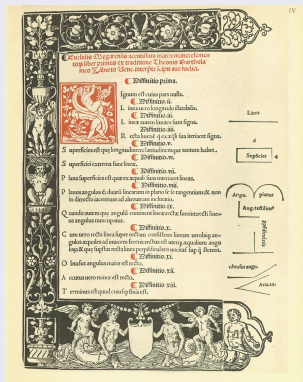
Рафаэль Санти Издание «Физики» Аристотеля, 1837 год

Ввел понятия: гравитация, прямолинейное движение, континуум.

Евклид (325 до н. э. – 265 до н. э.)



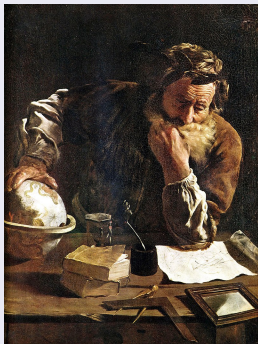
Юстус ван Гент



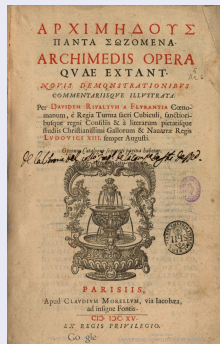
Венецианское издание Начал, 1505 год

Синтетическая геометрия

Архимед (287 до н. э. – 212 до н. э.)



Доменико Фетти



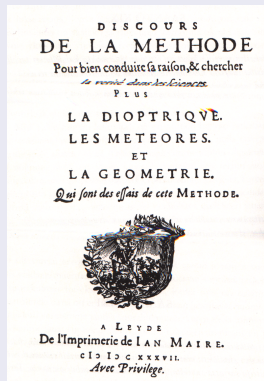
Archimēdous Panta sōzomena, 1615 год

Теория рычага, метод исчерпания, теория плавающих тел, теория бесконечно малых (Псаммит).

Рене Декарт (1596 – 1650)



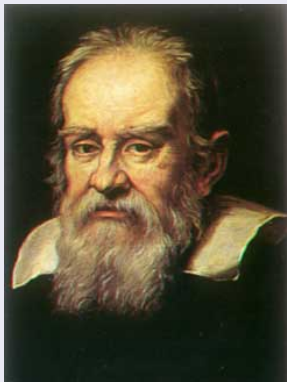
Франс Халс



Рассуждение о методе

Ввел понятие координат и понятие эфира.

Галилео Галилей (1564 – 1642)



Юстус Сустерманс



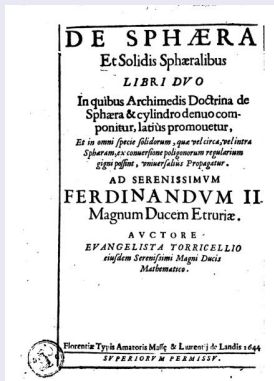
«Диалоги», начальная страница

Закон инерции, галилеева структура пространства-времени, телескоп.

Эванджелиста Торричелли (1608 – 1647)



Лоренцо Липпи



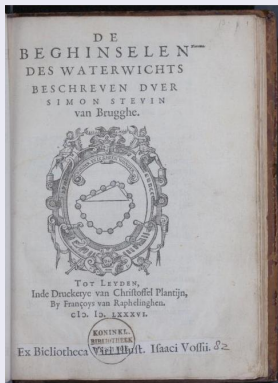
Opera geometrica

Принцип движения центров тяжести, гидравлика.

Симон Стевин (1548 – 1620)



Неизвестный художник



De Beghinselen der Waterwichts

Принцип замораживания.

Жиль Роберваль (1602 – 1675)



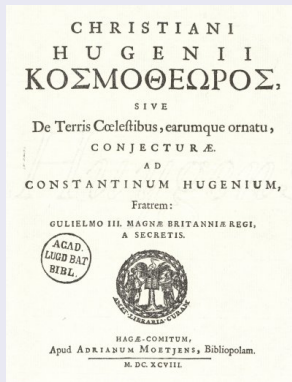
Шарль Лебрен

Закон равенства моментов сил и закон параллелограмма сил.

Христиан Гюйгенс (1629 – 1695)



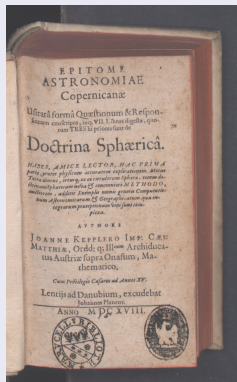
Каспар Нетшер



Cosmotheoros

Законы равноускоренного движения свободно падающих тел.

Иоганн Кеплер (1571 – 1630)



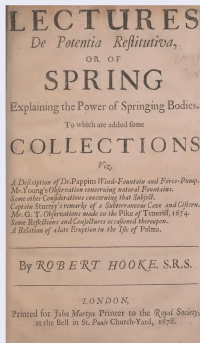
Неизвестный художник Epitome astronomiae copernicanae

Законы движения планет, закон инерции.

Роберт Гук (1635 – 1703)



Rita Greer



Лекция о пружинах

Закон Гука о пропорциональности силы растяжения удлинению ($Ut\ tensio, sic\ vis$), закон всемирного тяготения.

Джон Валлис (1616 – 1703)



Готфрид Кнеллер

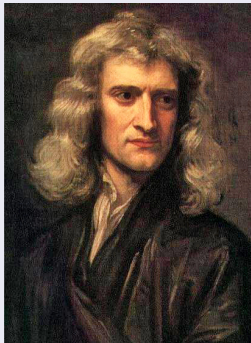


Opera mathematica

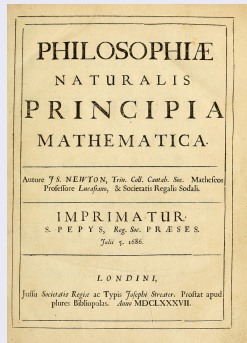
Начала математического анализа, законы упругого соударения.

- **Аристотель**
(384 до н. э. – 322 до н. э.)
Ввел понятия: гравитация, прямолинейное движение, континуум.
- **Евклид** (325 до н. э. – 265 до н. э.)
Синтетическая геометрия
- **Архимед** (287 до н. э. – 212 до н. э.)
Теория рычага, метод исчерпания, теория плавающих тел, теория бесконечно малых (Псаммит).
- **Рене Декарт** (1596 – 1650)
Ввел понятие координат и понятие эфира.
- **Галилео Галилей** (1564 – 1642)
Закон инерции, галилеева структура пространства-времени, телескоп.
- **Эванджелиста Торричелли** (1608 – 1647)
Принцип движения центров тяжести, гидравлика.
- **Симон Стевин** (1548 – 1620)
Принцип замораживания.
- **Жиль Роберваль** (1602 – 1675)
Закон равенства моментов сил и закон параллелограмма сил.
- **Христиан Гюйгенс** (1629 – 1695)
Законы равноускоренного движения свободно падающих тел.
- **Иоганн Кеплер** (1571 – 1630)
Законы движения планет, закон инерции.
- **Роберт Гук** (1635 – 1703)
Закон Гука о пропорциональности силы растяжения удлинению (*Ut tensio, sic vis*), закон всемирного тяготения.
- **Джон Валлис** (1616 – 1703)
Начала математического анализа, законы упругого соударения.

Исаак Ньютон (1643 – 1727)



Готфрид Кнеллер



Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica

Дифференциальное и интегральное исчисления, гравитация, аксиоматические основы механики, динамика.

Оригинал

- LEX I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quantenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.
- LEX II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.
- LEX III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Перевод

- LEX I. Всякое тело продолжает удерживаться в своём состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.
- LEX II. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.
- LEX III. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Топология

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество. Совокупность $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{M})$ его подмножеств называется **топологией** на $\mathfrak{M}$, если

- ($\mathcal{T}_1$) Множества $\mathfrak{M}$ и $\emptyset$ принадлежат $\mathcal{T}$.
- ($\mathcal{T}_2$) Если $U_1, \dots, U_n$ принадлежат $\mathcal{T}$, то их пересечение $U_1 \cap \dots \cap U_n$ также принадлежит $\mathcal{T}$.
- ($\mathcal{T}_3$) Если $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство элементов из $\mathcal{T}$, то его объединение $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ является элементом $\mathcal{T}$.

Пара $(\mathfrak{M}, \mathcal{T})$ называется **топологическим пространством**. Каждый элемент множества $\mathfrak{M}$ называется **точкой**, а каждый элемент $U \in \mathcal{T}$ — **открытым множеством**.

Окрестность

Пусть $(\mathfrak{M}, \mathcal{T})$ — топологическое пространство, а $p \in \mathfrak{M}$ — некоторая точка. Множество $U \in \mathcal{T}$, содержащее p , называется **окрестностью точки p** .

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Аксиома отделимости Хаусдорфа

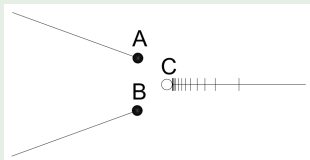
Пусть $(\mathfrak{M}, \mathcal{T})$ — топологическое пространство

Аксиома Хаусдорфа:

для любых двух различных точек $p_1, p_2 \in \mathfrak{M}$ существуют открытые множества $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, такие, что $p_1 \in U_1, p_2 \in U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Пример нехаусдорфова топологического пространства

Пусть $] - \infty, A],] - \infty, B],]C, +\infty[, A \neq B \neq C$, — числовые промежутки, лежащие на разных прямых. В их объединении введем топологию: окрестности точек на множестве $] - \infty, A[\cup] - \infty, B[\cup]C, +\infty[$ такие же, как на вещественной прямой. Окрестностями точек A и B назовем множества $]A - \varepsilon, C + \varepsilon[,]B - \varepsilon, C + \varepsilon[$, где $\varepsilon > 0$. Тогда точки A и B не имеют непересекающихся окрестностей, и, следовательно, неотделимы.



Пусть $(\mathfrak{M}, \mathcal{T})$ — топологическое пространство

База

Совокупность $\mathcal{B}$ подмножеств $\mathfrak{M}$ называется базой топологии $\mathcal{T}$, если

$$(\mathcal{B}_1) \quad \mathcal{B} \subset \mathcal{T};$$

$$(\mathcal{B}_2) \quad \text{для любого открытого множества } O \in \mathcal{T} \text{ существует}$$

семейство $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ элементов из $\mathcal{B}$, такое, что

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = O.$$

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Топологическое многообразие

Определение топологического многообразия

Топологическое пространство $(\mathfrak{M}, \mathcal{T})$ называется **топологическим многообразием размерности** $s \in \mathbb{N}$, если:

- (M_1) $(\mathfrak{M}, \mathcal{T})$ — хаусдорфово пространство со счетной базой;
- (M_2) для каждой точки $p \in \mathfrak{M}$ можно найти такую окрестность $U \in \mathcal{T}$ и такое открытое множество $O \subset \mathbb{R}^s$, что существует гомеоморфизм $\varphi : U \rightarrow O$ между ними.

Атлас

Аксиома (M_2) утверждает, что для $\mathfrak{M}$ существует множество $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, такое, что

- (A_1) для любого $\alpha \in I$ упорядоченная пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ состоит из непустого открытого подмножества $U_\alpha \subset \mathfrak{M}$ и гомеоморфизма $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow O_\alpha$ между U_α и некоторым открытым множеством $O_\alpha \subset \mathbb{R}^s$;
- (A_2) $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \mathfrak{M}$.

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Топологическое многообразие

Терминология

Множество A называется **атласом** на $\mathfrak{M}$. Натуральное число $\dim \mathfrak{M} := s$ определяет **размерность** $\mathfrak{M}$. Каждая упорядоченная пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ называется **координатной картой** на $\mathfrak{M}$. Множество U_α называется **координатной областью**, а гомеоморфизм φ_α — **координатным отображением**.

Локальные координаты

Каждая точка $p \in \mathfrak{M}$ содержится в координатной области U_α некоторой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Координатное отображение φ_α сопоставляет точке p кортеж $(x^1, \dots, x^s) = \varphi_\alpha(p)$, который представляет **локальные координаты** точки p .

Функция замены координат (гомеоморфизм пересчета)

Пусть $U_\alpha \cap U_\beta$ непусто, тогда на $U_\alpha \cap U_\beta$ определен гомеоморфизм

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

называемый **функцией замены координат**.

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Гладкое многообразие

Пусть $\mathfrak{M}$ — топологическое многообразие с атласом $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$.

C^∞ -согласованность

Карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) на $\mathfrak{M}$ называются C^∞ -согласованными, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$,
- 2) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ и гомеоморфизм пересчета $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$ является C^∞ -диффеоморфизмом.

Атлас A , в котором все карты попарно C^∞ -согласованы, называется **гладким атласом**.

Гладкая структура

Рассмотрим класс всех гладких атласов на $\mathfrak{M}$. Два гладких атласа A и B назовем эквивалентными ($A \sim B$), если их объединение, $A \cup B$, является гладким атласом. Это — отношение эквивалентности. Совокупность всех гладких атласов разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности $D = [A]$, называемые **гладкими структурами** на $\mathfrak{M}$.

Определение гладкого многообразия

Упорядоченная тройка $(\mathfrak{M}, \mathcal{T}, D)$, называется **гладким многообразием**.

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Примеры гладких многообразий

Пусть $\mathfrak{B}$ — двумерное многообразие, которое может быть представлено единичной сферой в трехмерном евклидовом пространстве: его образ описывается уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, где x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты. На $\mathfrak{B}$ может быть определен атлас $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$, в котором картирующие отображения определяются как стереографические проекции.

Стереографические проекции частей сферы на плоскость, точки которой имеют нулевую координату x_3 , при отождествлении этой плоскости с $\mathbb{R}^2$, представляются следующими отображениями:

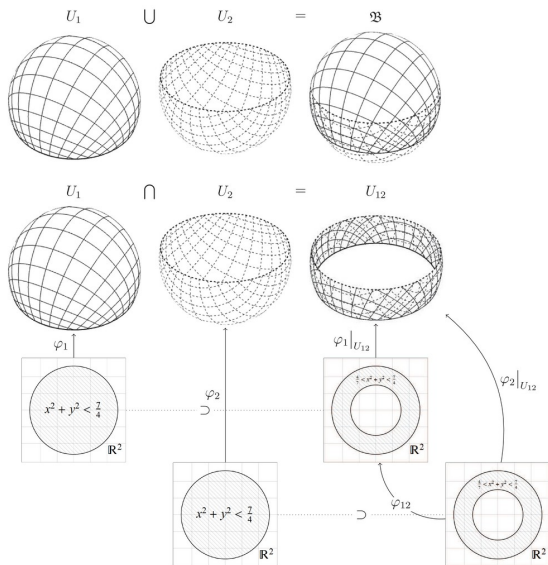
$$h_1 : \mathfrak{B} \setminus (0, 0, -1) \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_3}, \frac{x_2}{1 + x_3} \right),$$

$$h_2 : \mathfrak{B} \setminus (0, 0, 1) \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right),$$

первое из которых устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками сферы и плоскости, которые «прокалывает» луч с началом в точке «южного полюса» с координатами $(0, 0, -1)$, а второе устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками сферы и плоскости, которые «прокалывает» луч с началом в точке «северного полюса» с координатами $(0, 0, 1)$.

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Примеры гладких многообразий



В качестве районов действия карт, U_1 и U_2 , используются прообразы $h_1^{-1}(D)$, $h_2^{-1}(D)$ открытого диска

$D = \{(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 < \frac{7}{4}\}$. Сужения отображений h_1^{-1} и h_2^{-1} на D обозначим как $\varphi_1 : D \rightarrow U_1$ и $\varphi_2 : D \rightarrow U_2$:

$$\varphi_1 : (\xi^1, \xi^2) \mapsto \left(\frac{2\xi^1}{1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}, \frac{2\xi^2}{1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}, \frac{\xi^1 + \xi^2 - 1}{1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} \right);$$

$$\varphi_2 : (\eta^1, \eta^2) \mapsto \left(\frac{2\eta^1}{1 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}, \frac{2\eta^2}{1 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}, -\frac{\eta^1 + \eta^2 - 1}{1 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2} \right).$$

Области $U_{12} = U_1 \cap U_2$ в $\mathbb{R}^2$ соответствует множество пар (ξ^1, ξ^2) , таких, что $\frac{4}{7} < (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 < \frac{7}{4}$. Гомеоморфизм перехода

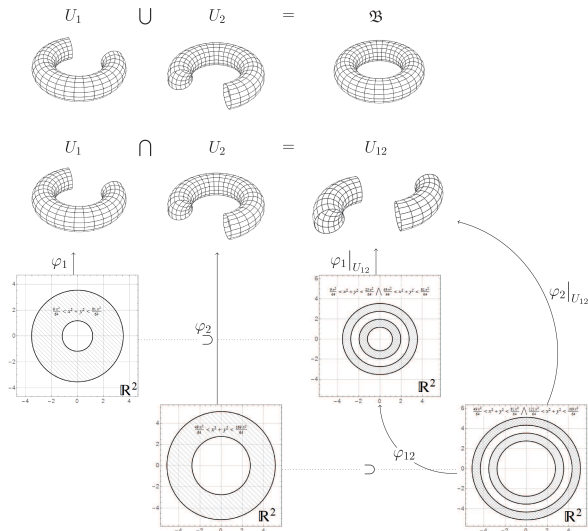
$\varphi_{12} : U_{12} \rightarrow U_{12}$, при этом, имеет вид

$$\varphi_{12} : (\eta^1, \eta^2) \mapsto (\xi^1, \xi^2) = \left(\frac{(\eta^1)^2}{(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}, \frac{(\eta^2)^2}{(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2} \right).$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — двумерное многообразие, которое может быть представлено тором в трехмерном евклидовом пространстве. На следующем рисунке показано картирование этой поверхности. Атлас тора также состоит из двух карт.

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

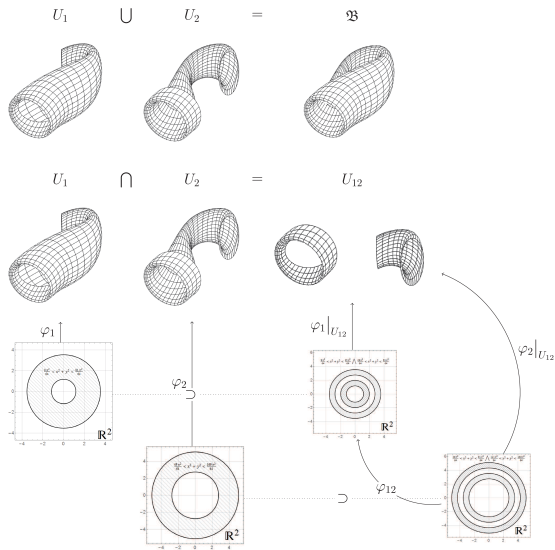
Примеры гладких многообразий



Наконец, пусть $\mathfrak{B}$ — двумерное многообразие, которое может быть представлено поверхностью (бутылкой) Клейна в трехмерном евклидовом пространстве. На следующем рисунке показано картирование этой поверхности. Атлас бутылки Клейна также состоит из двух карт.

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Примеры гладких многообразий



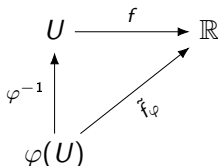
Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Гладкие функции

Пусть $(\mathfrak{M}, \mathcal{T}, [A])$ — гладкое s -мерное многообразие, а $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция. Выберем карту $(U, \varphi) \in A$. Отображение

$$\tilde{f}_\varphi = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R},$$

действует на открытом множестве $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^s$:



Таким образом, $\tilde{f}_\varphi$ — координатное представление f .

Функция $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ называется **гладкой**, если для любого $p \in \mathfrak{M}$ существует карта $(U, \varphi) \in A$, такая, что $p \in U$ и функция $\tilde{f}_\varphi$ является гладкой на множестве $\varphi(U)$.

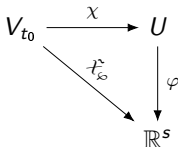
Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Гладкие кривые

Пусть $(\mathfrak{M}, \mathcal{T}, [A])$ — гладкое s -мерное многообразие, а $\chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathfrak{M}$ — непрерывное отображение, где $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал. Такое отображение будем называть **кривой**. Пусть $t_0 \in \mathbb{I}$. Выберем карту $(U, \varphi) \in A$, такую, что $\chi(t_0) \in U$. Положим $V_{t_0} = \chi^{-1}(U)$. Отображение

$$\tilde{\chi}_\varphi := \varphi \circ \chi|_{V_{t_0}} : V_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^s,$$

является функцией вещественного переменного, принимающей значения в множестве $\mathbb{R}^s$,



Таким образом, $\tilde{\chi}_\varphi$ — координатное представление χ .

Кривая $\chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathfrak{M}$ называется **гладкой**, если для любого $t \in \mathbb{I}$ существует карта $(U, \varphi) \in A$, такая, что $\chi(t) \in U$ и функция $\tilde{\chi}_\varphi$ является гладкой на множестве V_t .

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Гладкие отображения между многообразиями

Пусть $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_{\mathcal{M}}, [A])$ и $(\mathcal{N}, \mathcal{T}_{\mathcal{N}}, [B])$ — гладкие многообразия размерностей $\dim \mathcal{M} = s$ и $\dim \mathcal{N} = k$, а $\kappa: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ — непрерывное отображение.

Выберем карту $(V, \psi) \in B$. Можно найти, по меньшей мере, одну карту $(U, \varphi) \in A$ такую, что $W = U \cap \kappa^{-1}(V) \neq \emptyset$. В силу непрерывности κ , множество W открыто в U и, в этой связи множество $\varphi(W)$ открыто в $\mathbb{R}^s$.

Отображение

$$\tilde{\kappa}_{\varphi, \psi} = \psi \circ \kappa \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \kappa^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$$

называется **координатным представлением** κ в картах (U, φ) и (V, ψ) :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\kappa} & \kappa(W) \\ \varphi^{-1} \uparrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(W) & \xrightarrow{\tilde{\kappa}_{\varphi, \psi}} & \psi(\kappa(W)) \end{array}$$

Отображение $\kappa: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ называется **гладким**, если оно непрерывно и для любой точки $p \in \mathcal{M}$ существуют карты $(U, \varphi) \in A$ и $(V, \psi) \in B$, такие, что $p \in U$, $U \cap \kappa^{-1}(V) \neq \emptyset$ и координатное представление $\tilde{\kappa}_{\varphi, \psi}$ является гладким.

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Касательное расслоение

Через $C^\infty(\mathfrak{M})$ обозначается множество всех гладких функций вида $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

Дифференцирования в точке $p \in \mathfrak{M}$

Дифференцирование в p — это линейное отображение $\nu : C^\infty(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее правилу Лейбница:

$$\forall f, g \in C^\infty(\mathfrak{M}) : \quad \nu(fg) = f(p)\nu(g) + g(p)\nu(f).$$

Множество $T_p\mathfrak{M}$ всех дифференцирований в точке $p \in \mathfrak{M}$ — векторное пространство размерности $\dim T_p\mathfrak{M} = \dim \mathfrak{M}$, называемое **касательным пространством к $\mathfrak{M}$ в точке p** .

Касательное расслоение

Касательное расслоение определяется как дизъюнктное объединение

$$T\mathfrak{M} := \coprod_{p \in \mathfrak{M}} T_p\mathfrak{M} = \bigcup_{p \in \mathfrak{M}} \{p\} \times T_p\mathfrak{M}.$$

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии

Кокасательное расслоение

Кокасательное пространство в точке $p \in \mathfrak{M}$

Обозначим

$$T_p^* \mathfrak{M} := (T_p \mathfrak{M})^*.$$

Элементы $T_p^* \mathfrak{M}$ — линейные функционалы (ковекторы) $\nu : T_p \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определена билинейная операция

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p^* \mathfrak{M} \times T_p \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \nu, u \rangle_p := \nu(u).$$

Кокасательное расслоение

Кокасательное расслоение определяется как дизъюнктивное объединение

$$T^* \mathfrak{M} := \coprod_{p \in \mathfrak{M}} T_p^* \mathfrak{M} = \bigcup_{p \in \mathfrak{M}} \{p\} \times T_p^* \mathfrak{M}.$$

Ньютоново пространство-время

Второй закон Ньютона для силы гравитации:

$$m\ddot{x}^i = mf^i, \quad -\partial_i f^i = 4\pi\rho G.$$

Сократим на массу:

$$\ddot{x}^i - f^i = 0.$$

Можно ли представить последнее уравнение в виде

$$\ddot{x}^a(t) + \Gamma_{bc}{}^a(x(t))\dot{x}^b(t)\dot{x}^c(t) = 0?$$

Ответ: **Нет!**

Рассмотрим параметризацию $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x^1, x^2, x^3).$$

Тогда $\dot{x}^0 = 1$, $\ddot{x}^0 = 0$, и мы приходим к системе

$$\ddot{x}^0 = 0$$

$$\ddot{x}^i - f^i(x(t))\dot{x}^0(t)\dot{x}^0(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Полученную систему можно представить как уравнение автопараллельной:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0,$$

где

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{0k}^i = \Gamma_{j0}^i = 0,$$

и $\Gamma_{00}^i = -f^i$.

Тензор Риччи:

$$R_{00} = 4\pi\rho G.$$

Постулат I

Пространство-время — это множество M , элементы которого называются **событиями**.

Гипотеза континуума

Мощность множества M равна мощности множества вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Гипотеза близкодействия

Физические объекты непосредственно взаимодействуют лишь с теми объектами, которые находятся в «достаточной близости» от них.

Нужна формализация понятия «близко». Удобно предположить, что M наделено топологической структурой.

Гипотеза делимости событий

Два произвольных события $e_1, e_2 \in M$ могут быть отделены друг от друга.

Аналитическое описание событий

Предположим, что пространство M наделено структурой топологического многообразия: M локально евклидово, размерности n . То есть, для любого события $e \in M$ существуют открытое множество U , содержащее e , и гомеоморфизм $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Отсутствие глобального представления как $\mathbb{R}^n$

У нас нет никаких причин а-priori считать, что M целиком гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Все наши рассуждения локальны — относятся лишь к окрестности некоторого события.

Размерность пространства-времени

Интуитивно событие состоит из «места» и «времени». В этой связи, будем полагать, что $n = 4$.

$$4 = 3 + 1$$

Логическая аргументация того, что непосредственно наблюдаемое человеком физическое пространство должно быть трехмерным, принадлежит П. Эренфесту, который использовал для своих рассуждений факты о движении планет. Разумеется, гипотеза о трехмерности физического пространства в иных масштабах может быть подвержена фальсификации, в результате чего физическому пространству может быть присвоена более высокая размерность.

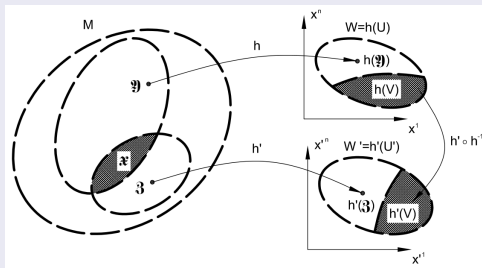
Ньютоново пространство-время

Пространство-время. Первый закон Ньютона

Гладкая структура

Непрерывных полей недостаточно для моделирования физических явлений. Необходима возможность приближения полей линейными отображениями. В этой связи, будем полагать, что M — гладкое четырехмерное многообразие.

Карты на многообразии



Резюме

Пространство-время M — гладкое многообразие размерности $\dim M = 4$.

Постулат II

На M задана геометрия в виде аффинной связности ∇ , определяющей правило параллельного переноса тензорных полей.

Аффинная связность ∇ — отображение

$$\nabla : \text{Vec}(M) \times \text{Vec}(M) \rightarrow \text{Vec}(M), \quad (u, v) \rightarrow \nabla_u v,$$

для которого выполнены условия:

$$(\nabla_1) \quad \forall u, v, w \in \text{Vec}(M) : \nabla_{u+v} w = \nabla_u w + \nabla_v w;$$

$$(\nabla_2) \quad \forall u, v \in \text{Vec}(M) \forall f \in C^\infty(M) : \nabla_{fu} v = f \nabla_u v;$$

$$(\nabla_3) \quad \forall u, v, w \in \text{Vec}(M) : \nabla_u (v + w) = \nabla_u v + \nabla_u w;$$

$$(\nabla_4) \quad \forall u, v \in \text{Vec}(M) \forall f \in C^\infty(M) \quad \nabla_u (fv) = f \nabla_u v + (uf)v.$$

Коэффициенты связности

Пусть $(\epsilon_\mu)_{\mu=1}^4$ — локальный репер на M . Поскольку $\nabla_{\epsilon_\mu} \epsilon_\nu$ — векторное поле, то его можно разложить по тому же локальному реперу:

$$\nabla_{\epsilon_\mu} \epsilon_\nu = \Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa \epsilon_\kappa.$$

Скалярнозначные функции $\Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa$ — коэффициенты связности.

Координатное представление связности

Пусть $u, v \in \text{Vec}(M)$. В координатном репере $(\partial_\alpha)_{\alpha=1}^4$ имеем разложения $u = u^\alpha \partial_\alpha$, $v = v^\beta \partial_\beta$ и $\nabla_{\partial_\alpha} \partial_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma \partial_\gamma$. В силу правила Лейбница,

$$\nabla_u v = u^\alpha \left(\partial_\alpha v^\gamma + v^\beta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma \right) \partial_\gamma.$$

Замена репера: неголономный $\mapsto$ неголономный

Пусть $(\epsilon_\mu)_{\mu=1}^4$ и $(\epsilon'_\mu)_{\mu=1}^4$ — локальные реперы на M , а $\Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa$, $\Gamma'_{\mu\nu}{}^\kappa$ — соответствующие коэффициенты связности. Если $\epsilon'_\beta = \Omega^\beta{}_\alpha \epsilon_\alpha$, где $[\Omega^\beta{}_\alpha]$ — поле невырожденных 4×4 матриц, то

$$\Gamma'_{\beta\gamma}{}^\alpha = \Gamma_{\sigma\kappa}{}^\mu \Upsilon^\alpha{}_\mu \Omega^\sigma{}_\beta \Omega^\kappa{}_\gamma + A^\lambda{}_\sigma \Upsilon^\alpha{}_\mu \Omega^\sigma{}_\beta \partial_{x^\lambda} \Omega^\mu{}_\gamma,$$

где $[\Upsilon^\beta{}_\alpha] = [\Omega^\beta{}_\alpha]^{-1}$, $\epsilon_\mu = A^\nu{}_\mu \partial_{x^\nu}$.

Замена репера: голономный $\mapsto$ неголономный

Если $\epsilon_\mu = \partial_\mu$, то

$$\Gamma'_{\beta\gamma}{}^\alpha = \Gamma_{\sigma\kappa}{}^\mu \Upsilon^\alpha{}_\mu \Omega^\sigma{}_\beta \Omega^\kappa{}_\gamma + \Upsilon^\alpha{}_\mu \Omega^\sigma{}_\beta \partial_{x^\sigma} \Omega^\mu{}_\gamma.$$

Замена репера: голономный $\mapsto$ голономный (замена координат)

Если $(x^\mu)_{\mu=1}^4, (y^\mu)_{\mu=1}^4$ — две системы координат на M , а $\Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa, \Gamma'_{\mu\nu}{}^\kappa$ — соответствующие коэффициенты связности, то

$$\Gamma'^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^\mu{}_{\sigma\kappa} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\gamma} + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\gamma}.$$

Мировая линия частицы

Движение частицы в пространстве-времени представлено гладкой кривой $\chi: \mathbb{I} \rightarrow M$, называемой **мировой линией частицы**. Здесь $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ — интервал.

Координатное представление кривой

Если (U, φ) , $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^4$, — карта на M , то координатное представление кривой $\chi: \mathbb{I} \rightarrow U$ имеет вид $\tilde{\chi} := \varphi \circ \chi: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^4$. Рассуждения иллюстрирует диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \xrightarrow{\chi} & U \\ \text{Id}_{\mathbb{I}} \uparrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{I} & \xrightarrow{\tilde{\chi}} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Постулат III (первый закон Ньютона)

Мировая линия частицы, движение которой происходит в отсутствие внешних воздействий, удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\chi'} \chi' = 0.$$

Здесь χ' — поле касательных векторов кривой.

Первый закон Ньютона в локальных координатах

$$\frac{d^2 \chi^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{d\chi^\beta}{dt} \frac{d\chi^\gamma}{dt} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 4.$$

От общего описания пространства-времени (M, ∇) приходим к частному описанию, когда имеется дополнительная информация о структуре событий.

Функция абсолютного времени

На M определена гладкая сюръективная функция

$$t : M \rightarrow \mathbb{R},$$

называемая **функцией абсолютного времени**. Ее значение $t(e)$ представляет **время**, соответствующее событию e , а число $|t(e_2) - t(e_1)|$ соответствует **временному интервалу**, соответствующего событиям $e_1, e_2 \in M$.

Отношение одновременности

Назовем события $e_1, e_2 \in M$ **одновременными**, если $t(e_1) = t(e_2)$.
Отношение одновременности является отношением эквивалентности на M ; множество M распадается в объединение

$$M = \bigcup_{e \in M} M_e$$

непересекающихся множеств

$$M_e := \{f \in M \mid t(f) = t(e)\},$$

называемых **слоями одновременности**.

Ограничим класс всевозможных функций t требованиями:

Время никогда не останавливается

$$\forall e \in M : (dt)_e \neq 0.$$

Время течет равномерно

$$\nabla dt = 0.$$

Калибровка Галилея

Пусть t — функция абсолютного времени, тогда функция

$$\tilde{t} = t + a,$$

где $a \in \mathbb{R}$ — константа, является функцией абсолютного времени, имеющей те же слои одновременности. Таким образом, t представляет лишь «арифметизацию» абсолютного времени, а не его само.

Встанем на более общую точку зрения.

1-форма абсолютного времени

1-формой абсолютного времени называется 1-форма $\Omega \in CVec(M)$, удовлетворяющая условиям:

- (Ω_1) Ω точна, т.е. существует гладкая функция $t : M \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\Omega = dt$;
- (Ω_2) $\forall e \in M : \Omega_e \neq 0$;
- (Ω_3) $\nabla \Omega = 0$.

Резюме

Любые две функции абсолютного времени, порождаемые формой Ω , отличаются на константу. Следовательно, Ω однозначно определяет разбиение пространства-времени на слои одновременности и может рассматриваться как формализация абсолютного времени.

Классификация

Пусть $e \in TM$. Вектор $u \in T_e M$ называется

- future directed, если $\Omega(u) > 0$,
- spatial, если $\Omega(u) = 0$,
- past directed, если $\Omega(u) < 0$.

Уточнение определения мировой линии

Мировая линия частицы — гладкая кривая $\chi : \mathbb{I} \rightarrow M$, такая, что $\chi'(t)$ — future directed вектор для любого $t \in \mathbb{I}$.

Необходима дополнительная информация!

Форма Ω определяет стратификацию событий на слои одновременности. Вместе с тем, она не дает правило, согласно которому двум событиям из различных слоев одновременности отвечает одно место.

Отношение одноместности

Предположим, что на M определено семейство кривых так, что через каждую точку M проходит кривая из этого семейства и притом только одна. Тогда скажем, что события e и f **одноместны**, если через них проходит одна и та же кривая.

Как проще задать кривые?

Будем предполагать, что кривые, о которых идет речь являются интегральными кривыми векторного поля $V \in \text{Vec}(M)$.

Стратификация на места

Векторное поле V определяет «ванты» интегральных кривых на M , а те, в свою очередь, — отношение одноместности. По этому отношению точки M разбиваются на непересекающиеся классы — **места**.

Совокупность таких классов является формализацией абсолютного пространства.

На V наложим условие нормировки:

Согласованность мест и времени

$$\langle \Omega, V \rangle = 1.$$

Таким образом, на пространстве-времени установлена структура (M, ∇, Ω, V) , позволяющая стратифицировать события по местам и временам.

В пределах одного слоя одновременности мы можем измерять длины и углы. Но между разными слоями — не можем. Таким образом, задана вырожденная метрика.

Метрика $\hbar \in \text{Sec}(T^*M \otimes T^*M)$ — это тензорное поле, такое, что:

- (h_1) $\hbar_e(u, v) = \hbar_e(v, u)$, для любого $e \in M$ и любых $u, v \in T_e M$,
- (h_2) $\hbar_e(u, u) \geq 0$, для любого $e \in M$ и любого $u \in T_e M$,
- (h_3) для любого $e \in M$ справедлива эквиваленция: равенство $\hbar_e(u, v) = 0$ выполняется для любого $u \in T_e M$ в том и только в том случае, когда $v = kV_e$, для некоторого $k \in \mathbb{R}$,
- (h_4) $\nabla \hbar = 0$.

Ньютоново пространство-время

Второй закон Ньютона

Метрика $\mathcal{K}$ определяет правило, позволяющее перевести вектор в ковектор или ковектор в вектор. Пусть $(\cdot)^\sharp : T^*M \rightarrow TM$ — отображение, переводящее ковектор в вектор.

Силовое поле

Назовем силовым полем ковекторное поле $F \in \text{Sec}(T^*M)$, такое, что $f := F^\sharp$ — spatial-векторное поле.

Второй закон Ньютона

Мировая линия частицы, двигающейся под действием силового поля f , удовлетворяет уравнению

$$m \nabla_{\chi'} \chi' = f,$$

где $m > 0$ — инертная масса частицы.

Пусть кручение связности равно нулю

$$\mathfrak{T} = 0$$

Выберем функцию абсолютного времени t , согласованную с Ω .

Стратифицированный атлас

Пусть атлас A таков, что любая его карта (U, φ) устроена следующим образом. В координатном отображении $\varphi : x \mapsto (x^0, x^1, x^2, x^3)$ компонента $\varphi^0 : x \mapsto x^0$ совпадает с $t: \varphi^0 = t|_U$.

Представление $\nabla dt = 0$

$$\nabla_{\partial_i} dx^0 = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Таким образом, $\Gamma^0_{ji} = 0$ для всех $i, j = 0, 1, 2, 3$.

Второй закон Ньютона

$$(\chi^0)'' + \Gamma^0_{ij}(\chi^i)'(\chi^j)' = 0,$$

$$(\chi^q)'' + \Gamma^q_{ij}(\chi^i)'(\chi^j)' = \frac{1}{m}f^q, \quad q = 1, 2, 3.$$

Первое уравнение дает

$$\chi^0(\lambda) = a\lambda + b,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$.

Три последующих уравнения представим в виде

$$(\chi^q)'' + \Gamma^q_{\gamma\delta}(\chi^\gamma)'(\chi^\delta)' + \Gamma^q_{00}(\chi^0)'(\chi^0)' + 2\Gamma^q_{\gamma 0}(\chi^\gamma)'(\chi^0)' = \frac{1}{m}f^q,$$

где $q, \gamma, \delta = 1, 2, 3$.

После репараметризации мировой линии с помощью функции абсолютного времени

$$\ddot{\chi}^q + \Gamma^q_{\gamma\delta} \dot{\chi}^\gamma \dot{\chi}^\delta + \Gamma^q_{00} \dot{\chi}^0 \dot{\chi}^0 + 2\Gamma^q_{\gamma 0} \dot{\chi}^\gamma \dot{\chi}^0 = \frac{1}{ma^2} f^q, \quad q, \gamma, \delta = 1, 2, 3.$$

Физический смысл левой части:

- $\Gamma^q_{\gamma\delta} \dot{\chi}^\gamma \dot{\chi}^\delta$ корректирующий член;
- $\Gamma^q_{00} \dot{\chi}^0 \dot{\chi}^0$ гравитационный член;
- $2\Gamma^q_{\gamma 0} \dot{\chi}^\gamma \dot{\chi}^0$ ускорение Кориолиса.

Ограничение на связность

Полагаем, что кривизна связности равна нулю:

$$\mathfrak{R} = 0.$$

Представление I закона Ньютона

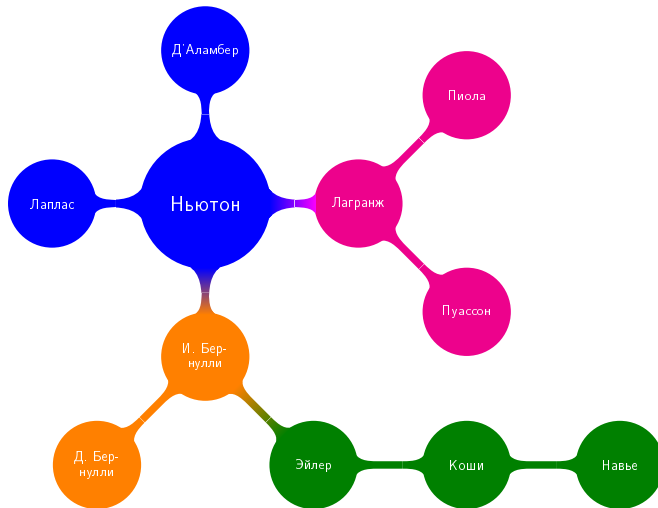
Существует система координат (x^i) , называемая **декартовой**, в которой оператор ∇ сводится к частным производным. Тогда для свободной частицы имеем

$$\frac{d^2 x^i}{du^2} = 0.$$

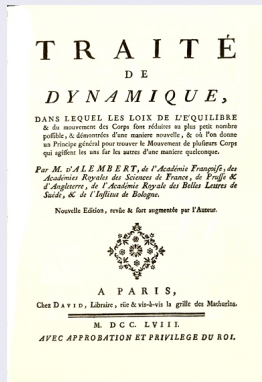
Исторический обзор: механика после Ньютона

Исторический обзор

Механика: после Ньютона



Жан Лерон Д'Аламбер (1717 – 1783)



Морис Кантен де Латур Тракта́т о динамике

Небесная механика, принцип Д'Аламбера.

Пьер-Симон де Лаплас (1749 – 1827)



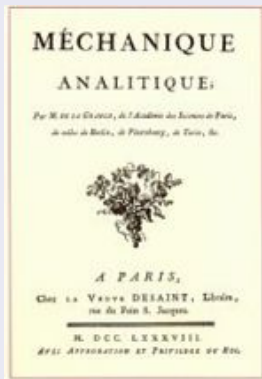
Жан-Батист Полен Герен

Небесная механика.

Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813)



Неизвестный художник



Mécanique analytique

Принцип наименьшего действия, уравнения для непрерывной среды.

- Аристотель предполагал, что «природа ничего не делает напрасно и во всех своих проявлениях избирает кратчайший или легчайший путь». Однако конкретный смысл терминов «кратчайший» или «легчайший» при этом не уточнялся. Клавдий Птолемей показал, что при отражении луча света его общий путь является кратчайшим в том случае, когда угол падения равен углу отражения, что и наблюдается на практике.
- Впервые вариационный принцип сформулировал Пьер Ферма в 1662 году, и он относился именно к преломлению света. Ферма показал, что критерием в данном случае является не путь, а время — луч преломляется под таким углом, чтобы суммарное время в пути было минимально.
- Пьер Луи де Мопертюи в трактате «Согласование различных законов природы, которые до сих пор казались несовместимыми» дал первую формулировку принципа наименьшего действия: «путь, которого придерживается свет, является путём, для которого количество действия будет наименьшим».
- Жозеф Луи Лагранж ввел строгое понятие вариации функции, придал вариационному исчислению современный вид.
- В 1834—1835 годах Уильям Роуэн Гамильтон опубликовал ещё более общий вариационный принцип, из которого следовали все более ранние как частные случаи.

Иоганн Бернулли (1667 – 1748)



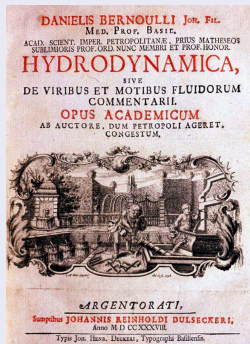
Иоганн Рудольф Хубер

Закон сохранения энергии.

Даниил Бернулли (1700 – 1782)



Johann Jacob Haid



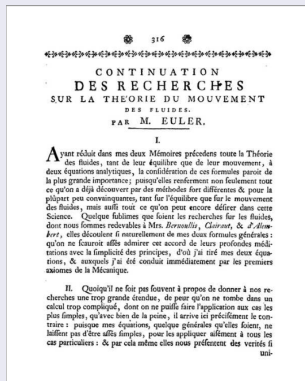
Гидродинамика

Закон сохранения энергии, закон сохранения момента количества движения.

Леонард Эйлер (1707 – 1783)



Эмануэль Хандманн



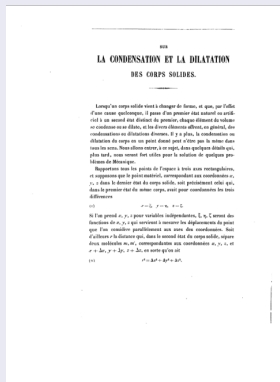
Трактат о движении жидкостей

Законы движения твердых тел.

Огюстен Луи Коши (1789 – 1857)



Зéphирин Беллиард



О деформации твердых тел

Напряжения, деформации.

Симеон Дени Пуассон (1781 – 1842)



François-Séraphin Delpech

Одна из работ по механике

Принцип материальной индифферентности.

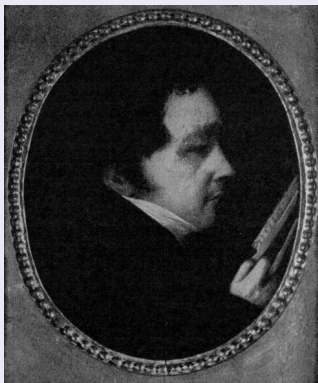
Клод Луи Мари Анри Навье (1785 – 1836)



Бюст в École Nationale des Ponts et Chaussées

Формулировка уравнений линейной теории упругости.

Габбрио Пиола (1794 – 1850)



Неизвестен

Преобразование от актуальной формы к отсчетной.

Классическое выражение

$$\mathbf{J}\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T,$$

где $\mathbf{F}$ — градиент деформации, $J = \det \mathbf{F}$, $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{P}$ — первый тензор Пиолы – Кирхгофа.

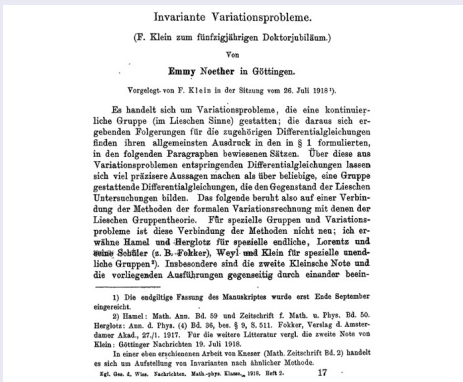
Современная интерпретация

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathcal{P} \otimes \wedge^2 T^*\mathfrak{B} & \xleftarrow{\chi^{*2}} & T^*\mathcal{P} \otimes \wedge^2 T^*\mathcal{P} \\ \downarrow \mathfrak{D} & & \downarrow \mathfrak{D} \\ T^*\mathcal{P} \otimes \wedge^3 T^*\mathfrak{B} & \xleftarrow{\chi^{*2}} & T^*\mathcal{P} \otimes \wedge^3 T^*\mathcal{P} \end{array}$$

Эмми Нётер (1882—1935)



Неизвестен



Invariante Variationsprobleme

Теорема Нетер.

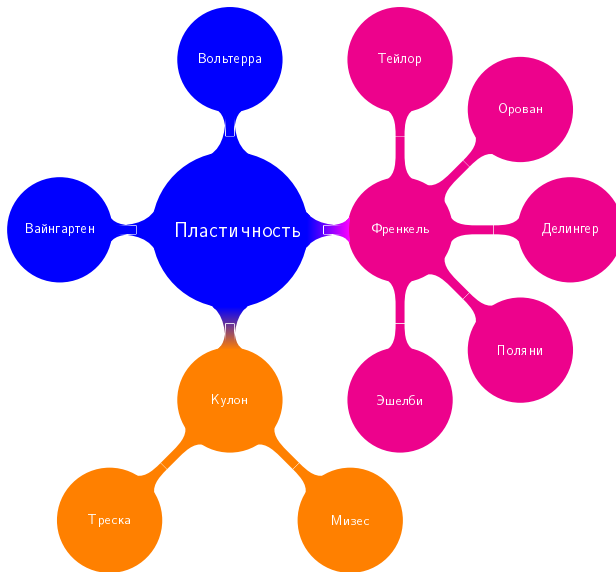
Арнольд Зоммерфельд (1868 – 1951)



Неизвестен

$$L(\dot{x}, x) = T(\dot{x}) - \Pi(x)$$

- **Жан Лерон Д'Аламбер** (1717 – 1783)
Небесная механика, принцип Д'Аламбера.
- **Пьер-Симон де Лаплас** (1749 – 1827)
Небесная механика.
- **Жозеф Луи Лагранж** (1736 – 1813)
Принцип наименьшего действия, уравнения для непрерывной среды.
- **Иоганн Бернулли** (1667 – 1748)
Закон сохранения энергии.
- **Даниил Бернулли** (1700 – 1782)
Закон сохранения энергии, закон сохранения момента количества движения.
- **Леонард Эйлер** (1707 – 1783)
Законы движения твердых тел.
- **Огюстен Луи Коши** (1789 – 1857)
Напряжения, деформации.
- **Симеон Дени Пуассон** (1781 – 1840)
Принцип материальной индифферентности.
- **Клод Луи Мари Анри Навье** (1785 – 1836)
Формулировка уравнений линейной теории упругости.
- **Габбрио Пиола** (1794 – 1850)
Преобразование от актуальной формы к отсчетной.
- **Эмми Нётер** (1882—1935)
Теорема Нетер
- **Арнольд Зоммерфельд** (1868 – 1951)
Разделение лагранжиана на кинетическую и потенциальную энергии.



Шарль Огюстен де Кулон (1736 – 1806)



Louis Hierle

Зависимость касательных напряжений материала от величины приложенных нормальных напряжений.

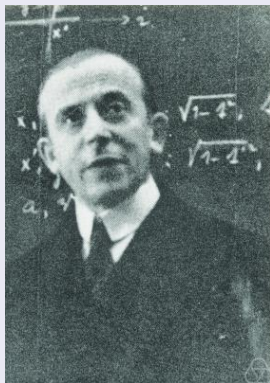
Анри Эдуард Треска (1814 – 1885)



Неизвестен

Критерий пластичности.

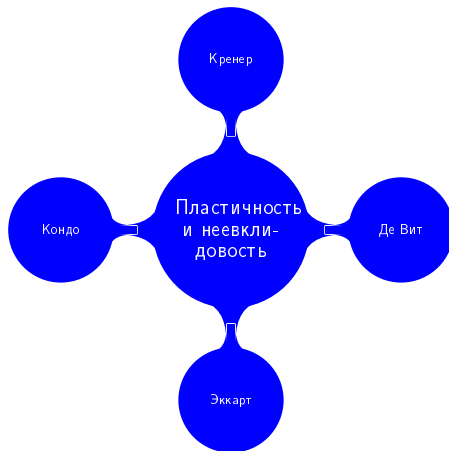
Рихард Мизес (1883 – 1953)



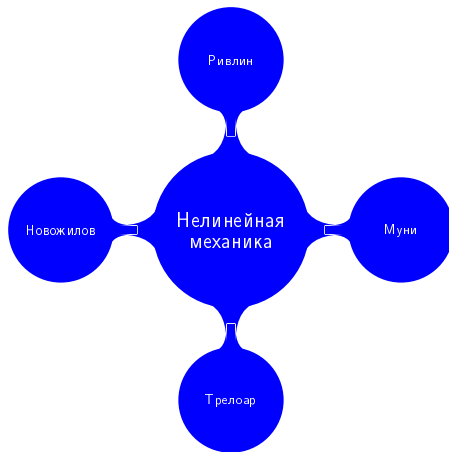
Konrad Jacobs

Критерий пластичности.

- **Шарль Огюстен де Кулон** (1736 – 1806)
Зависимость касательных напряжений материала от величины приложенных нормальных напряжений.
- **Анри Эдуард Треска** (1814 – 1885)
Критерий пластичности.
- **Рихард Мизес** (1883 – 1953)
Критерий пластичности.

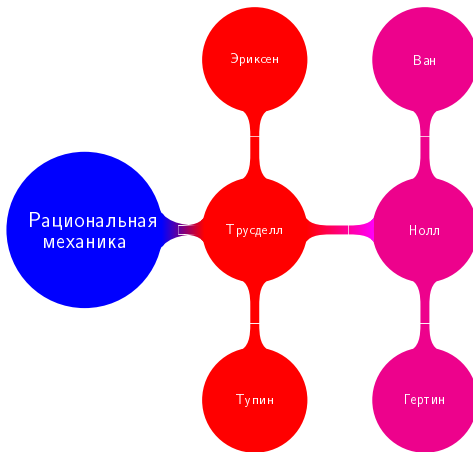






Исторический обзор

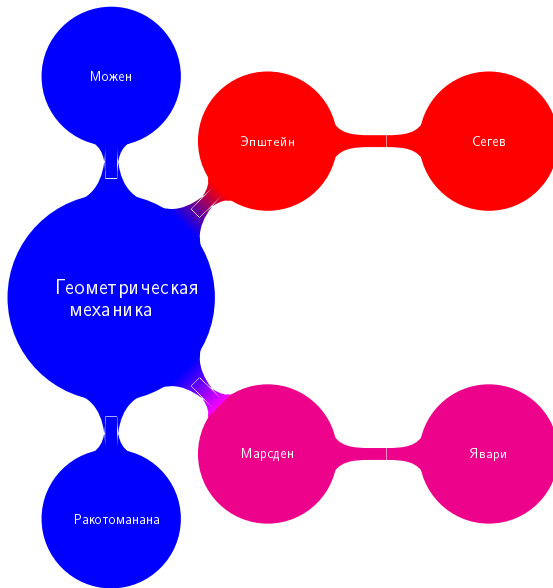
Механика: рациональная механика





Исторический обзор

Механика: геометрическая механика



Библиография



Truesdell C.

An Idiot's Fugitive Essays on Science

Springer-Verlag New York, 1984



Maugin G.A.

Continuum Mechanics through the Ages - From the Renaissance to the Twentieth Century: From Hydraulics to Plasticity

Springer, 2016



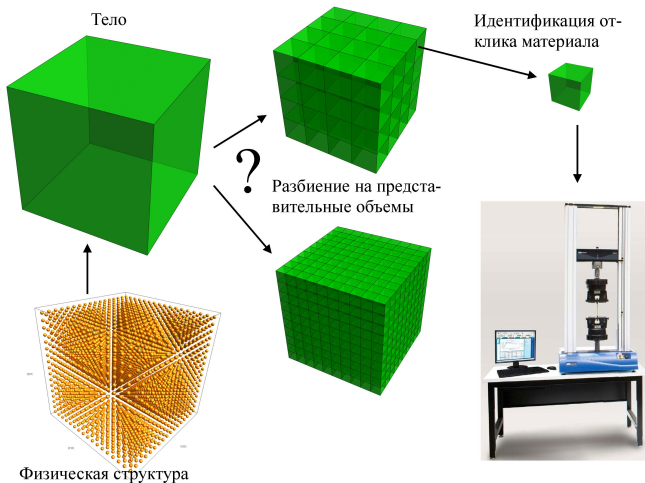
Capecchi Danilo, Ruta Giuseppe

Piola's contribution to continuum mechanics

Archive for History of Exact Sciences, 2007. Volume 61, Issue 4. pp. 303–342

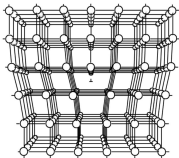
Мотивация

От физической структуры — к представительному объему

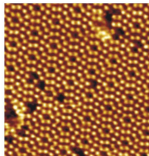


Материальные неоднородности (Material inhomogeneities)

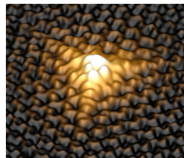
Дислокации



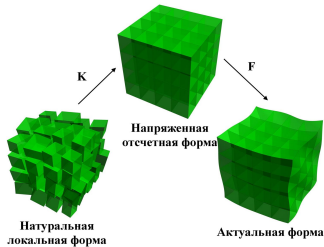
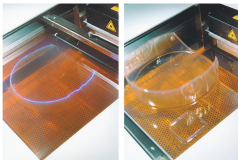
Дефекты в монокристалле кремния (TCM)



Дефекты в графитовой поверхности (TCM)



Послойное изготовление (LbL)



Уравнения из различных областей физики. Что общего?

- Уравнение движения Navier–Cauchy:

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + f = \rho \ddot{u}.$$

- Уравнение Beltrami–Michell (статика):

$$\Delta \mathcal{T} + 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\text{tr } \mathcal{T}) + 2 [\nabla f]^{\text{sym}} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \mathcal{T} \nabla \cdot f = 0.$$

- Волновые уравнения для электрического и магнитного векторов:

$$\Delta E - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{E} = 0, \quad \Delta H - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{H} = 0.$$

- Полевые уравнения Einstein (слабое поле):

$$\Delta g_{00} = 8\pi \rho.$$

Геометрический подход в физике и механике

- ① Epstein M. The Geometrical Language of Continuum Mechanics. Cambridge University Press, 2010. 312 p.
- ② Epstein M., Elzanowski M. Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach. Springer Science & Business Media, 2007. 274 p.
- ③ Maugin G.A. Material inhomogeneities in elasticity. CRC Press, 1993. Vol. 3. 276 p.
- ④ Kadic A., Edelen D. A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983. 293 p.
- ⑤ Frankel T. The geometry of physics: an introduction. Cambridge University Press, 2003. 694 p.
- ⑥ Marsden J.E., Hughes T.J. Mathematical foundations of elasticity. Dover Publications, 1994. 556 p.

Работы по рациональной механике

- ① Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Archive for rational Mechanics and Analysis. 1958. Vol. 2, no. 1. P. 197–226.
- ② Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. 1967. Vol. 27, no. 1. P. 1–32.
- ③ Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. 1967. Vol. 27, no. 1. P. 33–94.
- ④ Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics/Die Nicht-Linearen Feldtheorien der Mechanik. Springer Science & Business Media, 1965.
- ⑤ Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. 1975. Vol. 57, no. 4. P. 291–323.

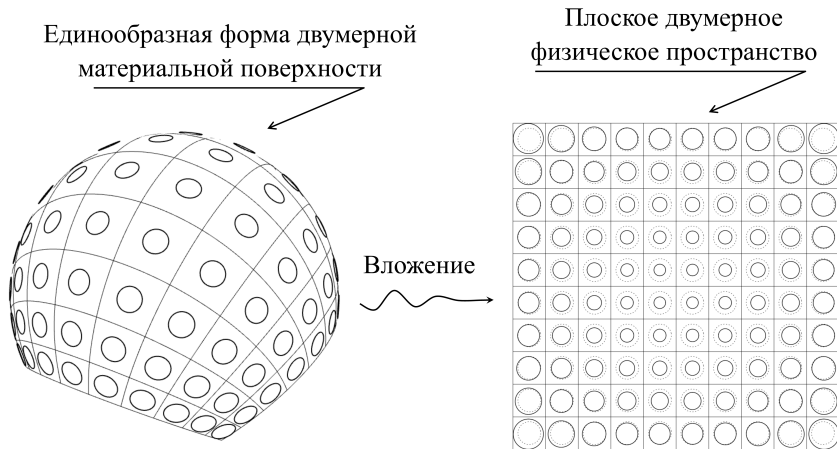
Работы по рациональной механике (продолжение)

- ⑥ Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
- ⑦ Noll W., Coleman B. Foundations of Linear Viscoelasticity. Reviews of Modern Physics, Volume 33, 1961. P. 239–249.
- ⑧ Noll W., Coleman B. The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume 13, 1963. P. 167–178.
- ⑨ Noll W. Euclidean Geometry and Minkowskian Chronometry, American Mathematical Monthly, Volume 71, 1964. P. 129–144.
- ⑩ Noll W. The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics, pp. 266–281 of The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics (Symposium at Berkeley, 1957), Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1959.

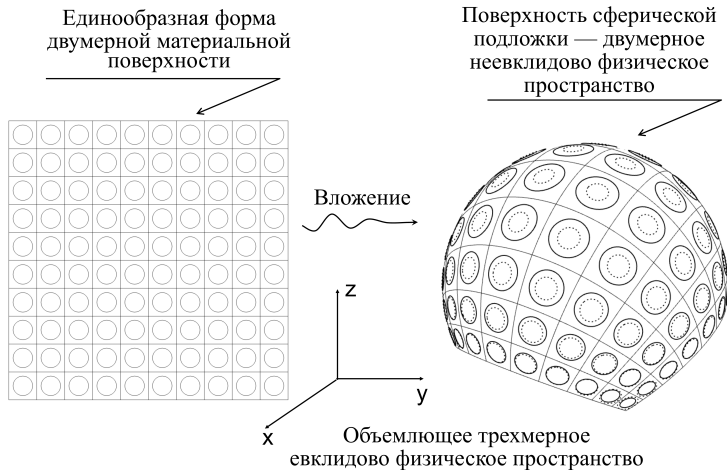
Работы W. Noll можно найти на сайте <http://www.math.cmu.edu/~wn0g/>

Работы по теории поля и гравитации

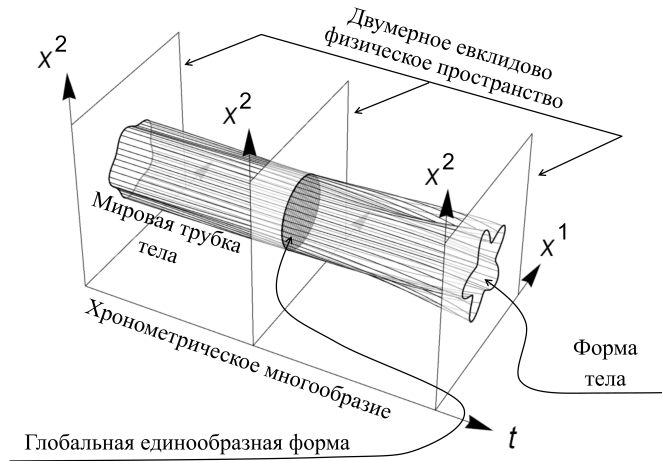
- ❶ Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация, Т. 1, 2, 3. — М.: Мир.
- ❷ Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. Т.1. Геометрия и классические поля. — М.: УРСС, 1996.
- ❸ Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. Т.2. Геометрия и классическая механика — М.: УРСС, 1998.
- ❹ Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. Т.3. Алгебраическая квантовая теория — М.: УРСС, 1999.
- ❺ Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. Т.4. Геометрия и квантовые поля — М.: УРСС, 2000.
- ❻ Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. Т.5. Гравитация — М.: УРСС, 2011.



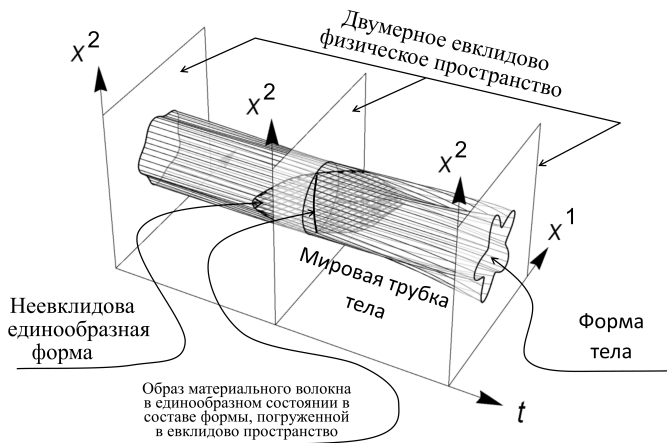
Вложение двумерного тела с неевклидовой внутренней геометрией в плоское физическое пространство



Вложение двумерного тела с евклидовой внутренней геометрией в неевклидово физическое пространство



Единообразная отсчетная конфигурация полностью погружена в физическое пространство наблюдателя



Единообразная отсчетная конфигурация частично погружена в физическое пространство наблюдателя

Экспериментальный базис: механика

- (1694) Яков Бернулли: большие деформации кетгутовых струн;
- (1721) Джакомо Рикатти: точки перегиба в зависимости сила-удлинение;
- (1773) Шарль Кулон: экспериментально обнаружил предел упругости прикручении железных и медных проволок;
- (1823) Джон Лесли: растяжение стержней из английского железа — получил формулу

$$y = \frac{p(1/2 + 1/3 \lg 1000 \varepsilon)}{\lg 2},$$

где y — нагрузка, p — разрушающее усилие, ε — относительная деформация;

- (1826) Анри Навье: эксперименты 1) по определению максимальной нагрузки и деформации при растяжении полос 2) Опыты с пустотелыми сферами при внутреннем давлении;

- (1830) Гаспар-Гюстав Кориолис: сжатие свинцовых цилиндров — изменение деформации во времени — ползучесть;
- (1837) Савар и Массон: эффект Савара-Массона — прерывистость конечной деформации;
- (1841) Понселе: мемуар «Mecanique Industriable», эмпирическое соотношение «Термическая обработка — отжиг — изменение предела упругости»:

$$\varepsilon = 0.1125 y + 0.00039 y (1.6)^{y/3}.$$

Понселе первым построил диаграмму напряжения–деформации, первым вычислил энергию деформации и выделил энергию, запасенную упруго и энергию, затрачиваемую на разрушение;

- (1841) Кармаш: точки перегиба связаны с началом развития остаточной деформации;
- (1846) Вертгейм: большие деформации тканей человека;

- (1860) Людерс: при ковке платиновых стержней на их поверхности появлялась светящаяся буква X;
- (1864) Треска: систематическое исследование больших пластических деформаций. Испытывал разные материалы: свинец, медь, лед, парафин, керамическая паста;
- (1872) Гопкинсон: течение различается при статическом напряжении и ударе;
- (1874) Тарстон: самопишущая машина, открыл зависимость диаграмм от истории нагружения — упрочнение;
- (1885) Баушингер: повышение предела упругости при растяжении сопровождается его уменьшением при сжатии — остаточные деформации - микропластичность — термические истории - память материала;

- (1880) Спринг: смерзание льда, спайка порошков при высоком давлении — тела ведут себя как жидкости;
- (1900) Гест: пластическое течение, при котором более, чем один компонент напряжений отличен от нуля — поверхность текучести;
- (1909-1961) Бриджмен: переходы на диаграмме сжатия — «физика высоких давлений», динамическая функция отклика;
- (1926) Лоде: сложное напряженное состояние — комбинация растяжения и давления в трубке.